МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МУРМАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра МИС и ПО

Методические указания к выполнению РГР по теме:

"Теория поля"

по дисциплине **"Математика "** для специальности **21.03.01 Нефтегазовое дело**
для студентов очной формы обучения

Мурманск
2019 г.

Оглавление

Введение.

Методические указания к выполнению РГР содержат задания на выполнение РГР№5 **"Теория поля"** по дисциплине **"Математика "**, а также решение примерного варианта РГР.

Расчетно-графическая работа по дисциплине выполняется в соответствии с учебным планом по специальности.

Целью РГР являются систематизация, расширение и углубление знаний, полученных при теоретическом изучении дисциплины, с тем, чтобы студент мог использовать полученные знания на практике.

Приступая к выполнению расчетно-графической работы, необходимо ознакомиться с соответствующими разделами программы курса и методическими указаниями.

РГР должна быть выполнено и представлено в срок, установленный кафедрой.

При выполнении задания студенту необходимо руководствоваться следующими требованиями:

1. В работе должен быть указан номер варианта работы.
2. Вариант каждой задачи выбирается по последней цифре номера зачетной книжки студента. Самовольная замена одного варианта задания другим не разрешается.
3. Перед решением задания должно быть приведено его условие. Отделите решение задачи от ее условия некоторым интервалом.
4. Решение задания следует сопровождать развернутыми расчетами.
5. Выполненная работа должна быть оформлена в соответствии с требованиями по оформлению письменных работ.
6. После получения прорецензированной работы студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочеты, а также выполнить все рекомендации.
7. Студенты, не получившие зачета по предусмотренным учебным планом письменным работам, к экзамену не допускаются.
8. Работы, выполненные не по своему варианту, рецензированию не подлежат.

Задания для выполнения

РГР №5 "Теория поля"

Задача 1. Дано плоское скалярное поле $U = U(x, y)$, точка $M_0(x_0, y_0)$ и вектор $\vec{s}$. Требуется:

1) найти уравнения линий уровня поля U;

2) найти градиент поля в точке M_0 и производную $\frac{\partial U}{\partial s}$ функции $U(x, y)$ в точке M_0 по направлению вектора $\vec{s}$;

3) построить в системе координат xOy 4-5 линий уровня, в том числе линию, проходящую через точку M_0; изобразить вектор $\overrightarrow{grad U}(M_0)$ на этом чертеже.

Номер варианта	Скалярное поле	Точка M_0 (x_0, y_0)	Вектор $\vec{s}$
1	$U = x^2 + 3y^2$	$M_0(1, 1)$	$\vec{s} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$
2	$U = x^2 - 2y^2$	$M_0(2, 1)$	$\vec{s} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$
3	$U = -3y - x^2$	$M_0(-1, -1)$	$\vec{s} = \vec{i} + 2\vec{j}$
4	$U = y^2 - 4x$	$M_0(-2, 1)$	$\vec{s} = -2\vec{i} + 2\vec{j}$
5	$U = 2x^2 - y^2$	$M_0(1, 1)$	$\vec{s} = -\vec{i} - 3\vec{j}$
6	$U = 2x^2 + y^2$	$M_0(1, 2)$	$\vec{s} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$
7	$U = x^3 - y$	$M_0(1, -2)$	$\vec{s} = -2\vec{i} + \vec{j}$
8	$U = 2x + y^2$	$M_0(-2, 1)$	$\vec{s} = \vec{i} + \vec{j}$
9	$U = (x + 1)^2 + y^2$	$M_0(0, 2)$	$\vec{s} = \vec{i} - 2\vec{j}$
10	$U = 3x^2 - y^2$	$M_0(1, -1)$	$\vec{s} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$

Задача 2. Вычислить работу силы $\vec{F}$ при перемещении точки приложения силы вдоль заданной кривой L от точки B до точки C, если значения параметра t в точках B и C заданы.

Номер варианта	Сила $\vec{F}$	Параметрические уравнения кривой L	Значения параметра t в точках B и C
1	$\vec{F} = 2\vec{i} - y\vec{j}$	$x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t$	$t_B = 0,\ t_C = 2\pi$

2	$\vec F = -x\,\vec i + 2y^2\,\vec j$	$x = 2\cos t,\ \ y = \sin t$	$t_B = 0,\ t_C = \frac{\pi}{6}$
3	$\vec F = 2xy\,\vec i + 3y\,\vec j$	$x = \cos 2t,\ \ y = \sin 2t$	$t_B = 0,\ t_C = \frac{\pi}{4}$
4	$\vec F = \frac{x}{3}\vec i + y\,\vec j$	$x = (\cos t)^3,\ \ y = (\sin t)^3$	$t_B = 0,\ t_C = \frac{\pi}{2}$
5	$\vec F = xy\,\vec i + x^2 y\,\vec j$	$x = 4\sin 2t,\ \ y = \cos 2t$	$t_B = 0,\ t_C = \frac{\pi}{3}$
6	$\vec F = (x+2)\,\vec i - y^2\,\vec j$	$x = 1-\sin t,\ \ y = 3\cos t$	$t_B = 0,\ t_C = \frac{\pi}{2}$
7	$\vec F = 3\,\vec i + \left(1-\frac{y}{4}\right)\vec j$	$x = 2t - 2\sin t,\ \ y = 2-2\cos t$	$t_B = 0,\ t_C = \pi$
8	$\vec F = xy\,\vec i + 5y\,\vec j$	$x = 2\cos 3t,\ \ y = 2\sin 3t$	$t_B = 0,\ t_C = \frac{\pi}{6}$
9	$\vec F = 2\,\vec i + 3x\,\vec j$	$x = 1+\cos 2t,\ \ y = (\sin 2t)^2$	$t_B = 0,\ t_C = \frac{\pi}{4}$
10	$\vec F = x^2\,\vec i + (1-2xy)\,\vec j$	$x = 3\sin t,\ \ y = 2\cos t$	$t_B = 0,\ t_C = \frac{\pi}{2}$

Задача 3. Задан радиус-вектор движущейся точки: $\vec r = \vec r(t),\ t \ge 0$. Найти векторы скорости и ускорения движения этой точки через 2 минуты после начала движения.

№ варианта	Радиус-вектор	№ варианта	Радиус-вектор
1	$\vec r(t) = (1-t^3)\vec i + (3t-t^2)\vec j + 0{,}1t^5\,\vec k$	2	$\vec r(t) = (t^2+2t)\vec i + (2t-1)\vec j + 0{,}25t^4\,\vec k$
3	$\vec r(t) = (5t+1)\vec i + 0{,}5t^3\vec j + (t^2-t^3)\vec k$	4	$\vec r(t) = (t^2+3t)\vec i + 0{,}1t^5\,\vec j + (5-2t)^2\,\vec k$
5	$\vec r(t) = (0{,}5t^3-t)\vec i + (3t+2)\vec j + 2t^2\,\vec k$	6	$\vec r(t) = (t^3-4t)\vec i + 3t\,\vec j + (2t-t^2)\vec k$
7	$\vec r(t) = (t-1)^3\,\vec i + 0{,}5t^4\,\vec j + (2-t)\vec k$	8	$\vec r(t) = 2t\,\vec i + (4t+0{,}5t^2)\vec j + (5-t^3)\vec k$
9	$\vec r(t) = 0{,}5t^4\,\vec i + (2t-t^3)\vec j + (t+2)\vec k$	10	$\vec r(t) = (t-2)\vec i + 0{,}5t^2\vec j + (1-0{,}5t^4)\vec k$

Задача 4. Дано векторное поле $\vec a$ и уравнение плоскости δ.

Номер варианта	Векторное поле $\vec a$	Уравнение плоскости δ
1	$\vec a = (y-z)\vec i + x\vec j + (y+4z)\vec k$	$2x + 2y + z - 2 = 0$
2	$\vec a = (y+3z)\vec i + 2y\vec j + (2x+y)\vec k$	$2x + 3y + z - 1 = 0$
3	$\vec a = (x+y)\vec i + (2z-1)\vec j + (x-3z)\vec k$	$3x + 2y + z - 6 = 0$

4	$\vec{a}=(x+z)\vec{i}+(y-z)\vec{j}+2x\vec{k}$	$x + 2y + 2z - 2 = 0$
5	$\vec{a}=(2z-x)\vec{i}+(x+2y)\vec{j}+3z\vec{k}$	$3x + y + 2z - 3 = 0$
6	$\vec{a}=(x-2y)\vec{i}+4y\vec{j}+(3x+z)\vec{k}$	$4x + y + 2z - 2 = 0$
7	$\vec{a}=(y+z)\vec{i}+(2y+1)\vec{j}+(y+2z)\vec{k}$	$x + y + 2z - 2 = 0$
8	$\vec{a}=(2x+1)\vec{i}+2z\vec{j}+(y-z)\vec{k}$	$2x + 3y + 4z - 6 = 0$
9	$\vec{a}=2z\vec{i}+(x-2y)\vec{j}+(x+z)\vec{k}$	$x + 2y + 4z - 4 = 0$
10	$\vec{a}=3y\vec{i}+(x+2z)\vec{j}+(x-z)\vec{k}$	$x + 5y + z - 5 = 0$

Требуется:

1) найти поток поля $\vec{a}$ через плоскость треугольника ABC где A, B, и C – точки пересечения плоскости δ с координатными осями, в направлении нормали плоскости, ориентированной «от начала координат»; построить чертеж пирамиды $OABC$, где O – начало координат;

2) используя формулу Остроградского-Гаусса, вычислить поток поля $\vec{a}$ через полную поверхность пирамиды $OABC$ в направлении внешней нормали.

Задача 5. Проверить, является ли векторное поле заданной силы $\vec{F}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля найти его потенциал и вычислить с помощью потенциала работу силы $\vec{F}$ при перемещении единичной массы из точки M в точку N, где точки M и N заданы.

Номер варианта	Сила $\vec{F}$	Точки M и N
1	$\vec{F}=(y^2-3x^2z)\vec{i}+2xy\vec{j}-x^3\vec{k}$	$M(-1, 0, 0)$, $N(1, 2, 1)$
2	$\vec{F}=2xz^3\vec{i}+3\vec{j}+3x^2z^2\vec{k}$	$M(0, -2, 1)$, $N(1, 0, 0)$
3	$\vec{F}=2xz\vec{i}-8y\vec{j}+(1+x^2)\vec{k}$	$M(1, -2, 0)$, $N(3, 0, -1)$
4	$\vec{F}=3y\vec{i}+(3x+2yz^2)\vec{j}+2y^2z\vec{k}$	$M(0, -1, -2)$, $N(1, -3, 0)$
5	$\vec{F}=6x^2\vec{i}+3y^2z\vec{j}+y^3\vec{k}$	$M(-2, 0, 1)$, $N(-1, 1, 0)$
6	$\vec{F}=(z^2-2y)\vec{i}-2x\vec{j}+2xz\vec{k}$	$M(2, 1, 0)$, $N(0, -1, 3)$
7	$\vec{F}=6xz^2\vec{i}+3y^2\vec{j}+6x^2z\vec{k}$	$M(-1, 2, 1)$, $N(0, 1, -1)$
8	$\vec{F}=6x^2\vec{i}+2yz\vec{j}+y^2\vec{k}$	$M(0, 1, -2)$, $N(1, -2, -1)$
9	$\vec{F}=2y\vec{i}+(2x+2yz)\vec{j}+y^2\vec{k}$	$M(0, -1, 4)$, $N(1, 0, 3)$
10	$\vec{F}=3x^2y\vec{i}+x^3\vec{j}-2xz\vec{k}$	$M(2, -2, 1)$, $N(3, 0, -1)$

Решение примерного варианта РГР №5

Задача 1. Дано плоское скалярное поле $U = x^2 - 2y$, точка $M_0(1,-1)$ и вектор $\vec{s} = 2\vec{i} - \vec{j}$. Требуется:

1) найти уравнения линий уровня поля;

2) найти градиент поля в точке M_0 и производную $\frac{\partial U}{\partial s}$ в точке M_0 по направлению вектора $\vec{s}$;

3) построить в системе координат xOy 4-5 линий уровня, в том числе линию уровня, проходящую через точку M_0, изобразить вектор $\overrightarrow{grad U}(M_0)$ на этом чертеже.

<u>Решение.</u>

1) Для $U = x^2 - 2y$ уравнение семейства линий уровня имеет вид $x^2 - 2y = C$ или $y = \frac{x^2}{2} - \frac{C}{2}$, где C – произвольная постоянная. Это семейство парабол, симметричных относительно оси Oy (ветви направлены вверх) с вершинами в точках $(0, -\frac{C}{2})$.

1) Найдем частные производные функции $U = x^2 - 2y$:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = (x^2 - 2y)'_x = 2x, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = (x^2 - 2y)'_y = -2.$$

В точке $M_0(1,-1)$ значения частных производных: $\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{M_0} = 2$, $\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{M_0} = -2$.

По формуле находим градиент поля в точке M_0:

$$\overrightarrow{grad U}(M_0) = \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{M_0} \cdot \vec{i} + \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{M_0} \cdot \vec{j} = 2\vec{i} - 2\vec{j}.$$

Прежде, чем найти производную по направлению вектора $\vec{s} = 2\vec{i} - \vec{j} =$ $= \{2; -1\}$, вычислим его модуль и направляющие косинусы:

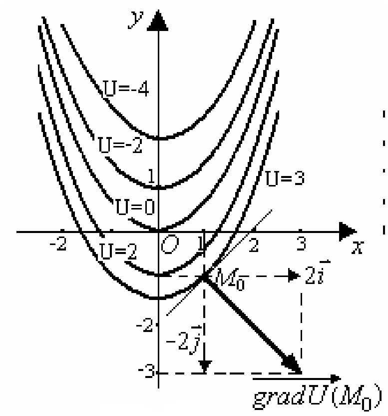
$$|\vec{s}| = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}, \quad \cos\alpha = \frac{s_x}{|\vec{s}|} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cos\beta = \frac{s_y}{|\vec{s}|} = \frac{-1}{\sqrt{5}}.$$

Производную поля по направлению вектора $\vec{s}$ в точке M_0 вычисляем по формуле (8): $\left.\dfrac{\partial U}{\partial s}\right|_{M_0} = \left.\dfrac{\partial U}{\partial x}\right|_{M_0} \cdot \cos\alpha + \left.\dfrac{\partial U}{\partial y}\right|_{M_0} \cdot \cos\beta = 2\cdot\dfrac{2}{\sqrt{5}} - 2\left(\dfrac{-1}{\sqrt{5}}\right) = \dfrac{6}{\sqrt{5}}$.

3) Для построения линий уровня в системе координат xOy подставим в уравнение семейства линий уровня $y = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{C}{2}$ различные значения C:

при $C = 0$ получим $y = \dfrac{x^2}{2}$ – уравнение линии уровня, соответствующей значению $U = 0$;

при $C = -2$ получим $y = \dfrac{x^2}{2} + 1$ (для $U = -2$);



при $C = 2$ получим $y = \dfrac{x^2}{2} - 1$ (для $U = 2$);

при $C = -4$ получим $y = \dfrac{x^2}{2} + 2$, и т.д.

Получим уравнение линии уровня, проходящей через точку $M_0(1,-1)$. Для этого вычислим значение функции U в этой точке: $\left.U\right|_{M_0} = \left.(x^2 - 2y)\right|_{\substack{x=1\\ y=-1}} = 3 \;\Rightarrow\; C = 3 \;\Rightarrow\; y = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{3}{2}$.

Построим эти линии в системе координат xOy (рис. 10).

Для построения градиента поля в точке M_0 нужно отложить от точки M_0 проекции градиента в направлениях координатных осей и построить вектор $\overrightarrow{gradU}(M_0)$ по правилу параллелограмма.

В данном случае $\overrightarrow{gradU}(M_0) = 2\vec{i} - 2\vec{j} = \{2; -2\}$, поэтому откладываем от точки $M_0(1,-1)$ две единицы вдоль оси Ox, две единицы в направлении, противоположном оси Oy и получаем вектор $\overrightarrow{gradU}(M_0) = 2\vec{i} - 2\vec{j}$ как диагональ параллелограмма, построенного на векторах $2\vec{i}$ и $-2\vec{j}$.

Ответы: 1) $x^2 - 2y = C$; 2) $\overrightarrow{gradU}(M_0) = 2\vec{i} - 2\vec{j}$, $\left.\dfrac{\partial U}{\partial s}\right|_{M_0} = \dfrac{6}{\sqrt{5}}$;

3) линии уровня и $\overrightarrow{gradU}(M_0)$ на рисунке.

Задача 2. Вычислить работу силы $\vec{F} = y^2\,\vec{i} + 2x\,\vec{j}$ при перемещении точки приложения силы вдоль заданной кривой L: $x = 1 - \cos 2t,\ \ y = (\cos 2t)^2$ от точки B до точки C, если значения параметра t в точках B и C заданы: $t_B = 0,\ t_C = \dfrac{\pi}{4}$.

Решение.

Для вычисления работы используем криволинейный интеграл II рода :

$$A = \int_{BC} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{BC} y^2\,dx + 2x\,dy.$$

Составленный криволинейный интеграл сводим к определенному интегралу, используя параметрические уравнения кривой BC:

$$A = \int_0^{\pi/4} \big(P\,(x(t), y(t))\,x'(t) + Q\big(x(t), y(t)\big)\,y'(t)\big)dt.$$

Для заданной кривой получаем:

$$x(t) = 1 - \cos 2t,\ \ x'(t) = 2\sin 2t,\ \ y(t) = (\cos 2t)^2,\ \ y'(t) = 2\cos 2t(-2\sin 2t),$$

$$P\,(x(t), y(t)) = y^2 = (\cos 2t)^4,\ \ Q\big(x(t), y(t)\big) = 2x = 2(1 - \cos 2t).$$

Таким образом, для нахождения работы нужно вычислить определенный интеграл:

$$A = \int_0^{\pi/4} \Big((\cos 2t)^4\, 2\sin 2t + 2(1 - \cos 2t)(-4\sin 2t\cos 2t)\Big)dt =$$

$$= 2\int_0^{\pi/4} \Big((\cos 2t)^4 \sin 2t - 4\sin 2t\cos 2t + 4\sin 2t\,(\cos 2t)^2\Big)dt.$$

Сделаем замену переменной в определенном интеграле:

$$2t = z,\ \ t = z/2,\ \ dt = dz/2,\ \ t \in [0; \pi/4] \Rightarrow z \in [0; \pi/2],$$

тогда получим: $A = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \Big((\cos z)^4 \sin z - 4\sin z\cos z + 4\sin z\,(\cos z)^2\Big)dz$.

Используем прием «подведение под знак дифференциала части подинтегральной функции»: $\sin z\,dz = -d(\cos z),\ \ \cos z\,dz = d(\sin z)\ \ \Rightarrow$

$$A = \int_0^{\pi/2} \Big(-(\cos z)^4\, d(\cos z) - 4\sin z\, d(\sin z) - 4(\cos z)^2\, d(\cos z)\Big)dz = \left(-\frac{(\cos z)^5}{5} - 4\frac{(\sin z)^2}{2} - \right.$$

$$-4\frac{(\cos z)^3}{3}\Bigg|_0^{\pi/2}=\left(-0-\frac{4}{2}-0\right)-\left(-\frac{1}{5}-0-\frac{4}{3}\right)=-2+\frac{1}{5}+\frac{4}{3}=\frac{-30+3+20}{15}=-\frac{7}{15}\approx-0{,}47.$$

Ответ: $A=-\dfrac{7}{15}\approx-0{,}47$ ед. работы.

Задача 3. Задан радиус-вектор движущейся точки:
$\vec r(t)=(5t-t^2)\vec i+(2+t^3)\vec j-2t\vec k,\ t\ge 0$. Найти векторы скорости и ускорения движения этой точки через 2 минуты после начала движения.

Решение.

Вектор-функция задана в виде: $\vec r=x(t)\vec i+y(t)\vec j+z(t)\vec k$.

Найдем первые и вторые производные ее проекций $x(t)$, $y(t)$ $z(t)$ по аргументу t:

$$\begin{cases}x(t)=5t-t^2,\\ y(t)=2+t^3,\\ z(t)=-2t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x'(t)=5-2t,\\ y'(t)=3t^2,\\ z'(t)=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x''(t)=-2,\\ y''(t)=6t,\\ z''(t)=0.\end{cases}$$

Найдем векторы скорости и ускорения движения точки по формулам:

$\vec v(t)=\{x'(t);\ y'(t);\ z'(t)\}=\{5-2t;\ 3t^2;\ -2\}$,

$\vec w(t)=\{x''(t);\ y''(t);\ z''(t)\}=\{-2;\ 6t;\ 0\}$.

Через 2 минуты после начала движения векторы скорости и ускорения будут:

$\vec v(2)=\{5-4;\ 3\cdot 2^2;\ -2\}=\{1;12;-2\}$, $\vec w(2)=\{-2;12;0\}$.

Ответы: $\vec v(2)=\{1;12;-2\}$, $\vec w(2)=\{-2;12;0\}$.

Задача 4. Дано векторное поле $\vec a=(1-3x)\vec i+(x+2z)\vec j+5y\vec k$ и уравнение плоскости δ: $3x+y+2z-3=0$. Требуется:

1) найти поток поля $\vec a$ через плоскость треугольника ABC где A, B, и C – точки пересечения плоскости δ с координатными осями, в направлении нормали плоскости, ориентированной «от начала координат»; построить чертеж пирамиды $OABC$, где O – начало координат;

2) используя формулу Остроградского-Гаусса, вычислить поток поля $\vec a$ через полную поверхность пирамиды $OABC$ в направлении внешней нормали.

Решение.

1) Чтобы вычислить поток поля $\vec a$ через плоскость треугольника ABC используем формулу: $\Pi_{ABC}=\iint\limits_{ABC}(\vec a\cdot\vec n)d\sigma=\pm\iint\limits_{D}\frac{\vec a\cdot\overrightarrow{gradF}}{|F'_z|}dx\,dy$, где D –

проекция треугольника ABC на плоскость xOy, F – функция, задающая плоскость δ, которой принадлежит треугольник ABC.

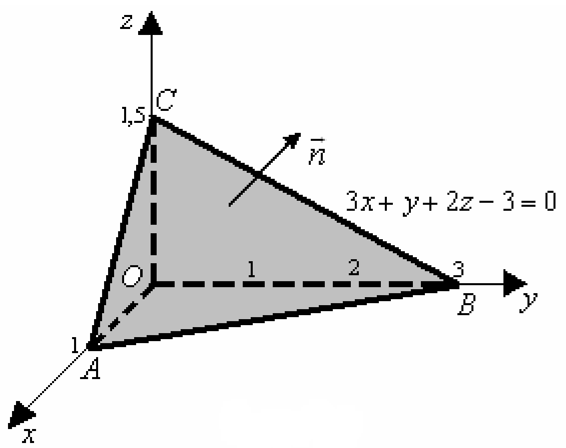
Для построения чертежа найдем точки A, B, и C пересечения плоскости δ с координатными осями:

$$\begin{cases} 3x+y+2z-3=0, \\ y=0, \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow A(1,0,0), \quad \begin{cases} 3x+y+2z-3=0, \\ x=0, \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow B(0,3,0),$$

$$\begin{cases} 3x+y+2z-3=0, \\ x=0, \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow C(0,0,1{,}5).$$

Построим чертеж пирамиды, отложив на координатных осях точки A, B, C и соединив их с началом координат O .

Из уравнения плоскости δ: $3x + y + 2z - 3 = 0$, которое имеет вид $F(x, y, z) = 0$, находим



$$\overrightarrow{grad}F = \{F'_x;\ F'_y; F'_z\} = \{3; 1; 2\}.$$

Поскольку все три проекции градиента положительные, то этот вектор образует с координатными осями острые углы, т.е. направлен «от начала координат» по отношению к плоскости δ.

Это означает, что вектор $\overrightarrow{grad}F$ и орт «внешней» нормали $\vec{n}$, указанный в задаче, совпадают по направлению, поэтому вычисление потока через плоскость треугольника ABC сводится к вычислению двойного интеграла:

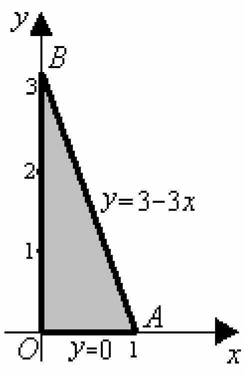
$$П_{ABC} = +\iint\limits_{AOB} \frac{\vec{a}\cdot\overrightarrow{grad}F}{|F'_z|}dx\,dy$$ (перед интегралом ставим знак «+»), где AOB – проекция треугольника ABC на плоскость xOy.

Для расстановки пределов интегрирования по треугольнику AOB найдем уравнение прямой AB на плоскости xOy:

$$\begin{cases} 3x + y + 2z - 3 = 0, \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow AB : y = 3 - 3x \quad \Rightarrow AOB : \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le 3 - 3x. \end{cases}$$

Вычислим $\vec{a} \cdot \overline{gradF} = (1-3x)3 + (x+2z)\cdot 1 + 5y \cdot 2 = 3 - 8x + 10y + 2z$ и получим подинтегральную функцию, подставив $F'_z = 2$ и $z = 0{,}5(3 - 3x - y)$ (из уравнения плоскости):

$$\frac{\vec{a} \cdot \overrightarrow{gradF}}{|F'_z|} = \frac{3 - 8x + 10y + (3 - 3x - y)}{2} = \frac{1}{2}(6 - 11x + 9y).$$



Таким образом, поток поля $\vec{a}$ через плоскость треугольника ABC:

$$\Pi_{ABC} = \iint\limits_{AOB} \frac{1}{2}(6 - 11x + 9y)dx\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^{3-3x} (6 - 11x + 9y)dy.$$

Вычислим внутренний интеграл по переменной y:

$$\int_0^{3-3x} (6 - 11x + 9y)dy = \left(6y - 11xy + \frac{9}{2}y^2\right)\Bigg|_{y=0}^{y=3(1-x)} = 18(1-x) - 33x(1-x) + \frac{81}{2}(1-x)^2 =$$

$$= 18 - 18x - 33x + 33x^2 + \frac{81}{2} - 81x + \frac{81}{2}x^2 = \frac{147}{2}x^2 - 132x + \frac{117}{2}.$$

Вычислим внешний интеграл по переменной x:

$$\Pi_{ABC} = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{147}{2}x^2 - 132x + \frac{117}{2}\right)dx = \left(\frac{49}{4}x^3 - 33x^2 + \frac{117}{4}x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{49}{4} - 33 + \frac{117}{4} = \frac{17}{2} = 8{,}5.$$

2) Чтобы вычислить поток поля $\vec{a}$ через полную поверхность пирамиды $OABC$, воспользуемся формулой Остроградского-Гаусса:

$$\Pi_{OABC} = \iiint\limits_{OABC} div\vec{a}\,dv.$$

Найдем дивергенцию этого поля по формуле: $div\,\vec{a} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$. Для поля $\vec{a} = (1-3x)\vec{i} + (x+2z)\vec{j} + 5y\vec{k}$ получаем:

$$div\,\vec{a} = (1-3x)'_x + (x+2z)'_y + (5y)'_z = -3+0+0 = -3.$$

Вычислим поток поля $\vec{a}$ через полную поверхность пирамиды $OABC$: $\Pi_{OABC} = \iiint\limits_{OABC} div\,\vec{a}\,dv = -3\iiint\limits_{OABC} dv = -3\mathrm{V}_{OABC}$, где V_{OABC} – объем пирамиды $OABC$. Этот объем можно вычислить, следующим образом:

$$\mathrm{V}_{OABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta OAB}|OC| = \frac{1}{3}\frac{1}{2}|OA||OB||OC| = \frac{1}{6}1\cdot 3\cdot 1{,}5 = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}.$$

В результате получаем: $\Pi_{OABC} = -3\mathrm{V}_{OABC} = -\frac{9}{4} = -2{,}25$.

Ответы: 1) Π_{ABC} = 8,5; 2) Π_{OABC} = –2,25.

Задача 5. Проверить, является ли векторное поле силы $\vec{F} = 2xy\,\vec{i} + (x^2-2yz)\,\vec{j} - y^2\vec{k}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля найти его потенциал и вычислить с помощью потенциала работу силы $\vec{F}$ при перемещении единичной массы из точки M(0,1,0) в точку N(–1,2,3).

Решение.

Для проверки потенциальности векторного поля $\vec{F} = \{2xy;\ x^2-2yz;\ -y^2\} = \{P;\ Q;\ R\}$ найдем его ротор по формуле:

$$\overrightarrow{rot\,F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & x^2-2yz & -y^2 \end{vmatrix} = \left((-y^2)'_y - (x^2-2yz)'_z\right)\vec{i} -$$

$$-\left((-y^2)'_x - (2xy)'_z\right)\vec{j} + \left((x^2-2yz)'_x - (2xy)'_y\right)\vec{k} = \{-2y+2y;\ 0;\ 2x-2x\} = \{0;\ 0;\ 0\} = \vec{O}.$$

Следовательно, поле потенциально.

Для проверки соленоидальности поля найдем его дивергенцию:

$$div\,\vec{F} = (2xy)'_x + (x^2-2yz)'_y + (-y^2)'_z = 2y - 2z + 0 \neq 0.$$

Следовательно, поле не соленоидально.

Для нахождения потенциала $U(x, y, z)$ векторного поля возьмем фиксированную точку $B(0, 0, 0)$, текущую точку $C(x, y, z)$ и вычислим криволинейный интеграл $\int\limits_{BC} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$ по ломаной $BEKC$, звенья которой параллельны осям координат и $E(x, 0, 0)$, $K(x, y, 0)$. Получим:

$$U(x,y,z)=\int\limits_{BE}+\int\limits_{EK}+\int\limits_{KC}=\int\limits_0^x P(x,0,0)\,dx+\int\limits_0^y Q(x,y,0)\,dy+\int\limits_0^z R(x,y,z)\,dz=$$

$$=\int\limits_0^x 2x\cdot 0\,dx+\int\limits_0^y (x^2-2y\cdot 0)\,dy+\int\limits_0^z (-y^2)\,dz=0+x^2\cdot y\Big|_0^y-y^2\cdot z\Big|_0^z=x^2y-y^2z.$$

Получили потенциал поля $U(x,y,z)=x^2y-y^2z+C$, где C – произвольная постоянная. Для проверки решения найдем градиент потенциала $U(x,y,z)=x^2y-y^2z$: $\overline{grad}U=\{U'_x;U'_y;U'_z\}=\{2xy;\,x^2-2yz;\,-y^2\}=\vec{F}$. Следовательно, потенциал поля силы найден верно.

Найдем работу векторного поля $\vec{F}$ при перемещении единичной массы из точки $M(0,1,0)$ в точку $N(-1,2,3)$:

$$A=\int\limits_{MN} dU=U\Big|_M^N=U(N)-U(M)=(x^2y-y^2z)\Big|_N-(x^2y-y^2z)\Big|_M=-10-0=-10.$$

Ответы: поле $\vec{F}$ потенциально, не соленоидально; $U(x,y,z)=x^2y-y^2z+C$, где C – произвольная постоянная; работа $A=-10$.